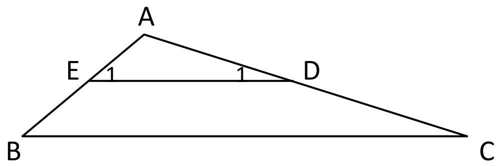
דוגמאות לשאלות בגאומטרייה – כולל הצעות שונות לדרכי פתרון

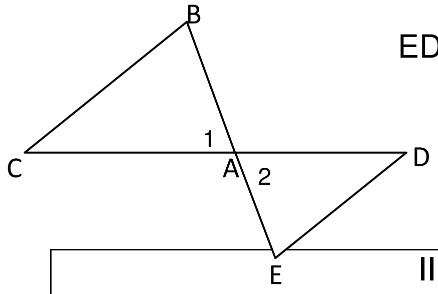
שאלות 1,2,3 מתאימים לשליש הראשון של כיתה ח', יתר השאלות מתאימות לשליש השלישי של כיתה ח'

1. E נקודה על הצלע AB במשולש ABC, D נקודה על הצלע AC במשולש. ED || BC
נמקו מדוע משולש ABC דומה למשולש AED



דרך אפשרית I	דרך אפשרית II
$\sphericalangle A$ שווה בשני המשולשים כי היא זווית משותפת. $\sphericalangle E_1 = \sphericalangle B$ כי הן זוויות מתאימות שוות בין הישרים המקבילים לכן אם **שתי זוויות** של משולש שוות לשתי זוויות של משולש אחר אז המשולשים דומים.	$\sphericalangle A$ שווה בשני המשולשים כי היא זווית משותפת. $\sphericalangle E_1 = \sphericalangle B$ כי הן זוויות מתאימות שוות בין הישרים המקבילים $\sphericalangle D_1 = \sphericalangle C$ כי סכום הזוויות בכל משולש הוא $180°$ לכן אם **שלוש זוויות** של משולש שוות לשלוש זוויות של משולש אחר אז המשולשים דומים. (תלמיד שהשתמש במשפט זה ולא ציין את הזווית השלישית, יקבל רק חלק מהניקוד על השאלה)

2. A היא נקודת החיתוך של הישרים CD ו-AB. ED || CB
א. האם המשולשים ABC ו- AED חופפים?
ב. האם המשולשים ABC ו- AED דומים?
נמקו.

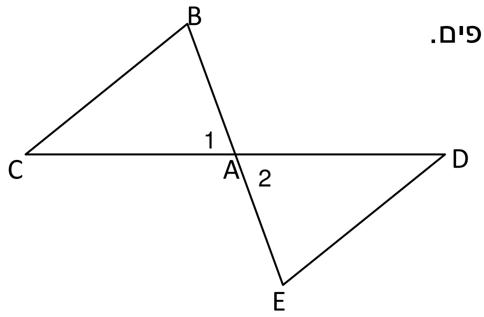


דרך אפשרית I	דרך אפשרית II
א. אין אפשרות לדעת אם המשולשים חופפים כי אין מידע לגבי שוויון צלעות. בכל משפט חפיפה מופיע שוויון לפחות של צלע אחת. ב. המשולשים דומים כי יש שלוש הזוויות במשולש אחד שוות לשלוש הזוויות במשולש האחר. שני זוגות של זוויות מתחלפות שוות זו לזו $\sphericalangle B = \sphericalangle E$ ו- $\sphericalangle C = \sphericalangle D$ וזוויות קודקודיות השוות זו לזו $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2$ נימוק נוסף: אם **שתי זוויות** של משולש שוות לשתי זוויות של משולש אחר אז המשולשים דומים.	א. $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2$ כי הן זוויות קודקודיות השווה זו לזו $\sphericalangle C = \sphericalangle D$ כי הן זוויות מתחלפות שוות בין הישרים המקבילים $\sphericalangle B = \sphericalangle E$ כי הן זוויות מתחלפות שוות בין הישרים המקבילים המשולשים אינם חופפים – לא קיים משפט חפיפה זז"ז. ב. לפי סעיף א' אם **שלוש זוויות** של משולש שוות לשלוש זוויות של משולש אחר אז המשולשים דומים.

3. A היא נקודה באמצע הקטע CD.

ED || CB

נמקו מדוע המשולשים ABC ו- AED חופפים.



א. רשמו בכתיב מתמטי מה בשאלה נתון ומה צריך להוכיח:

נתון:

AC = AD

ED || CB

צריך להוכיח:

$\triangle ADE \cong \triangle ACB$

ב. הוכיחו:

<u>דרך אפשרית</u>

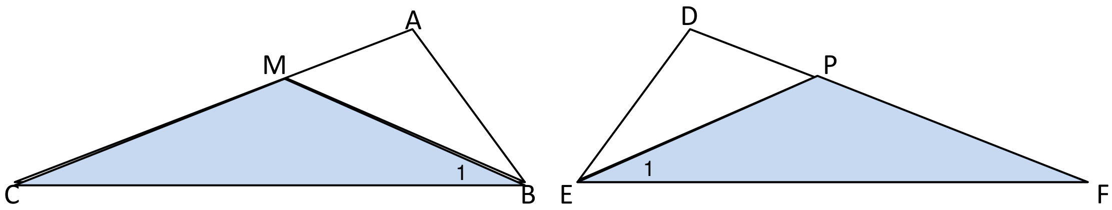
AC = AD נתון

$\measuredangle A_1 = \measuredangle A_2$ כי הן זוויות קודקודיות השוות זו לזו

$\measuredangle C = \measuredangle D$ כי הן זוויות מתחלפות שוות בין הישרים המקבילים (ניתן להשתמש בזוויות B, E לחילופין)

לכן המשולשים חופפים לפי משפט החפיפה זווית, צלע, זווית

.4



נתון: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$, (הקדקודים רשומים בהתאמה)

BM ו- EP הם חוצי הזוויות B ו- E בהתאמה.

א. נמקו מדוע BM שווה ל EP.

<u>שלד של הוכחה</u>

א. נמצא את השוויונות בין שני המשולשים על פי החפיפה הנתונה

ב. נחפוף את המשולשים MBC ו- PEF בעזרת שלושה שוויונות

ג. נסיק מסקנה על סמך חפיפת המשולשים.

דרך אפשרית I	דרך אפשרית II
נוכיח שהמשולשים MBC ו- PEF חופפים זה לזה: $\measuredangle E = \measuredangle B$ בהתאם לחפיפה בנתון $\measuredangle E_1 = \measuredangle B_1$ חצאי זוויות שוות, שוות זו לזו $EF = CB$ בהתאם לחפיפה $\measuredangle F = \measuredangle C$ בהתאם לחפיפה לכן $\Delta PEF \cong \Delta MBC$ לפי משפט החפיפה זווית, צלע, זווית לכן $BM = EP$	זוויות B ו- E שוות בהתאם לחפיפה לכן גם חצאי הזוויות שוות. מתקבלים המשולשים MBC ו- PEF החופפים זה לזה עפ"י משפט החפיפה זווית, צלע, זווית. הצלעות EP ו- BM שוות כי הן צלעות מתאימות שוות במשולשים החופפים.

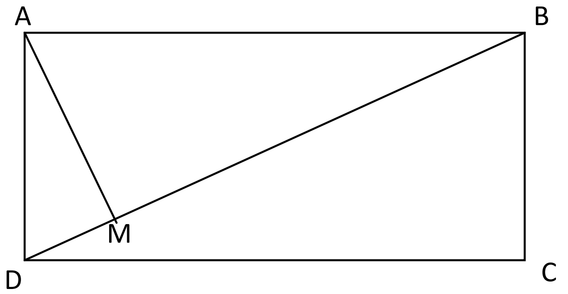
ב. האם ניתן להוכיח את שוויון הצלעות BM ו- EP בדרך נוספת?

5. המרובע ABCD הוא מלבן.

AM מאונך לאלכסון המלבן DB

$\measuredangle BDC = \alpha$. בטאו את גודל

הזווית BAM בעזרת α.



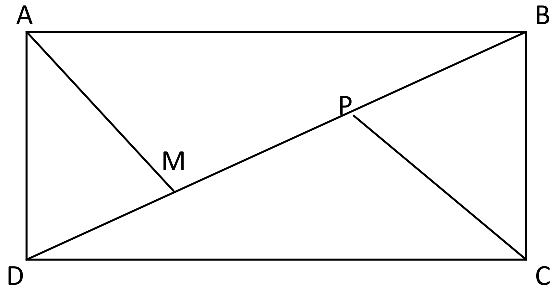
<table dir="rtl">
<tr>
<td>דרך אפשרית I
א. נתון:
$AM \perp BD$
$\measuredangle BDC = \alpha$
ב. הסבר:
$\alpha = \measuredangle ABD = \measuredangle BDC$ זוויות מתחלפות שוות בין ישרים מקבילים (צלעות נגדיות במלבן מקבילות זו לזו)
$\measuredangle AMB = 90°$ על פי הנתון
$\measuredangle BAM = 90° - \alpha$ סכום הזוויות החדות במשולש ישר זווית הוא 90°</td>
<td>דרך אפשרית II
כל זוויות המלבן ישרות ולכן אם חלק מהזווית הישרה גודלו α אז המשלים הוא $90° - \alpha$.
AM מאונך ל- BD ולכן משולש AMD הוא משולש ישר זווית. אם זווית ADM גודלה $90° - \alpha$ אז גודלה של הזווית השלישית הוא α. גם זווית A היא ישרה לכן המשלים של הזווית הוא $90° - \alpha$. מכאן ש-
$\measuredangle BAM = 90° - \alpha$.</td>
</tr>
<tr>
<td>דרך אפשרית III
$\measuredangle BDA = 90° - \alpha$ משלימה את זווית D לזווית ישרה
$\measuredangle AMD = 90°$ על פי הנתון
$\measuredangle DAM = \alpha$ סכום זוויות במשולש AMD הוא 180°
$\measuredangle BAM = 90° - \alpha$ משלימה את הזווית לזווית ישרה.</td>
<td></td>
</tr>
</table>

6. המרובע ABCD הוא מלבן.

P ו- M נקודות על האלכסון BD כך ש – BP = DM

א. כמה זוגות של משולשים חופפים בסרטוט?

ב. בחרו שני זוגות של משולשים חופפים ונמקו מדוע הם חופפים.



א. בסרטוט 3 זוגות משולשים חופפים

ב. ננמק מדוע משולש PBC חופף למשולש MDA

דרך אפשרית I	דרך אפשרית II
AD = BC כי במלבן הצלעות הנגדיות שווֹת DM = BP נתון AD || BC כי במלבן הצלעות הנגדיות מקבילות ∢BDA = DBC זוויות מתחלפות שוות בין ישרים מקבילים לכן ΔMDA ≅ ΔPBC לפי משפט החפיפה צלע, זווית, צלע	לשני המשולשים שתי צלעות שוות: AD = BC ו- BP = DM. ∢BDA = ∢DBC כי הן זוויות מתחלפות שוות בין הישרים המקבילים BC ו- AD שהן צלעות נגדיות במלבן (במלבן צלעות נגדיות מקבילות). לכן - ΔMDA ≅ ΔPBC לפי משפט החפיפה צלע, זווית, צלע

ננמק מדוע משולש PDC חופף למשולש MBA

<u>דרך אפשרית I</u>

הצלעות AB ו- CD שווֹת כי צלעות נגדיות במלבן שוות

∢ABD = ∢CDB כי הן זוויות מתחלפות שוות בין הישרים המקבילים AB ו- CD שהן צלעות נגדיות במלבן, ובמלבן צלעות נגדיות מקבילות.

הצלעות DP ו- BM שוות כי לקטעים שווים מחברים קטע משותף PM

לכן -

ΔMDA ≅ ΔPBC לפי משפט החפיפה צלע, זווית, צלע

7. המרובע ABCD הוא מלבן.

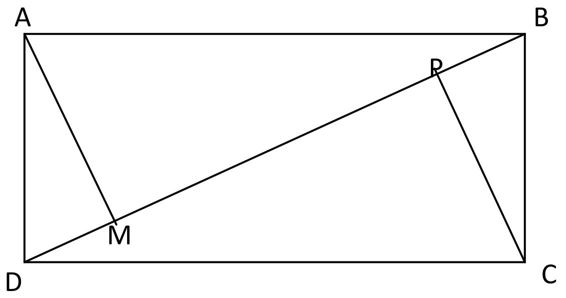
AM מאונך לאלכסון המלבן DB

CP הוא גובה לצלע DB במשולש CBD

א. כמה זוגות של משולשים חופפים בסרטוט?

ב. בחרו שני זוגות של משולשים חופפים

ונמקו מדוע הם חופפים.



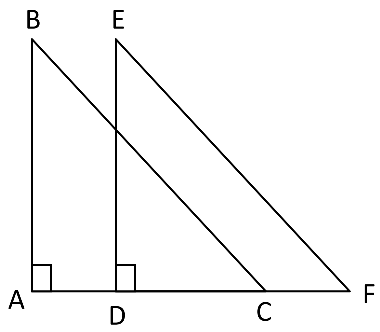
א. בסרטוט 3 זוגות משולשים חופפים

ב. ננמק מדוע משולש PDC חופף למשולש MBA

דרך אפשרית I	דרך אפשרית II
AB = DC כי .... AB || DC כי ..... ∢BDC =∢ABD כי .... ∢CPD =∢AMB = 90° כי........... לכן ∢PCD =∢MAB כי .... לכן ΔMBA ≅ ΔPDC לפי משפט החפיפה ____	הצלעות AB ו- CD שוות ∢ABD = ∢CDB כי הן זוויות מתחלפות שווות בין הישרים המקבילים AB ו- CD שהן צלעות נגדיות במלבן (במלבן צלעות נגדיות מקבילות). AM ו- CP גבהים במשולש, לכן הזוויות AMB ו- CPD הן ישרות. סכום הזוויות החדות במשולש הוא 90° לכן הזוויות PCD ו- MAB שווה. לכן - ΔMBA ≅ ΔPDC לפי משפט החפיפה זווית, צלע, זווית.

באופן דומה ניתן להוכיח שמשולשים BPC ו- DMA חופפים.

8. לפניכם שני משולשים ישרי זווית.



AD = CF ,BC || EF

א. הסבירו מדוע המשולשים ABC ו- DEF חופפים.

ב. השלימו:

AB = _______

∢B = ______

<u>דרך אפשרית I</u>

∢EDF = ∢A זוויות ישרות

הצלעות AC ו- DF שוות כי הוספנו קטע משותף שווה לצלעות השוות AD ו- CF

∢EFD = ∢BCA כי הן זוויות מתאימות שוות בין הישרים המקבילים BC ו- EF

לכן -

$\Delta EDF \cong \Delta ABC$ לפי משפט החפיפה זווית, צלע, זווית

השלימו:

AB = ED

∢B = ∢E

<u>דרך אפשרית II</u>

∢EDF = ∢A כי ______________________________

הצלעות _________ שווה זו לזו כי הוספנו אותו קטע לשתי הצלעות AD ו- CF, שהיה נתון שהן שוות

∢EFD = ∢BCA כי ____

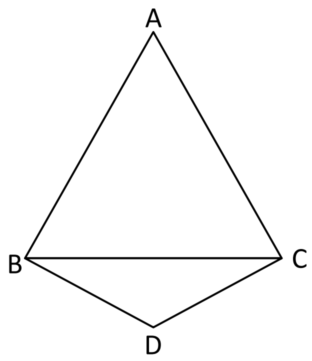
לכן -

לפי משפט חפיפה _________ $\Delta ABC \cong \Delta EDF$

9. משולש ABC משולש שווה שוקיים (AB = AC).

AC ⊥ CD ,AB ⊥ BD

נמקו מדוע המשולש BDC הוא משולש שווה שוקיים.

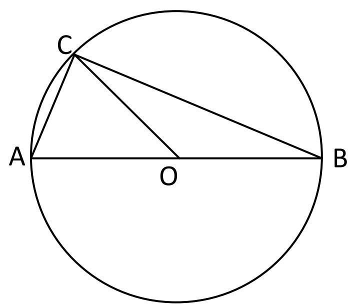


דרך אפשרית II	דרך אפשרית I
נתונים ישרים מאונכים ולכן זוויות ABD ו- ACD ישרות. במשולש שווה שוקיים זוויות הבסיס שוות ולכן זוויות ABC ו- ACB שוות. אם נחסר מהזוויות הישרות את זוויות הבסיס נקבל שתי זוויות שוות – CBD ו- BCD במשולש BDC. אם במשולש שתי זוויות שוות אז המשולש שווה שוקיים.	$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = \alpha$ זוויות בסיס שוות במשולש שווה שוקיים $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD = 90°$ נתון שהישרים מאונכים ולכן מתקבלות זוויות ישרות $\sphericalangle DBC = \sphericalangle DCB = 90° - \alpha$ הפרש זוויות שווה לכן משולש BDC משולש שווה שוקיים כי אם במשולש שתי זוויות שוות אז המשולש שווה שוקיים

10. הקטע AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O. הקטע OC הוא רדיוס

(C נקודה על היקף המעגל).

נמקו מדוע משולש ACB הוא משולש ישר זווית.



<u>דרך אפשרית:</u>

OC הוא תיכון לצלע AB כי OB = AO

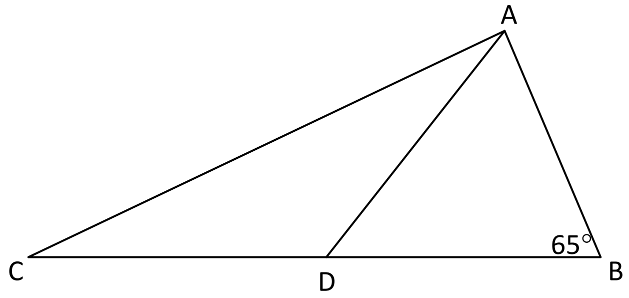
OA = OB = OC שלושת הקטעים הללו הם רדיוסים במעגל, וכל הרדיוסים שווים.

משולש ABC ישר זווית כי אם במשולש התיכון לצלע שווה למחצית הצלע אותה הוא חוצה אז המשולש ישר זווית.

11. משולש ABC ישר זווית ($\sphericalangle A = 90°$)

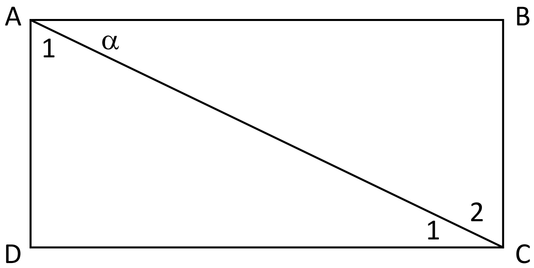
$\sphericalangle B = 65°$, AD תיכון ל- BC.

חשבון את זווית ADC



דרך אפשרית I	דרך אפשרית II
ABC משולש ישר זווית נתון $\sphericalangle B = 65°$ נתון $\sphericalangle C = 25°$ סכום הזוויות במשולש הוא 180° AD תיכון ליתר נתון לכן BD = CD = AD במשולש ישר זווית תיכון ליתר שווה למחצית היתר $\sphericalangle CAD = 25°$ כי זווית בסיס במשולש שווה שוקיים שוות זו לזו $\sphericalangle ADC = 130°$ כי סכום הזוויות במשולש הוא 180°	משולש ABC הוא משולש ישר זווית. AD תיכון ליתר. במשולש ישר זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר לכן AD = BD. במשולש שווה שוקיים זוויות הבסיס שוות ולכן $\sphericalangle DAB = \sphericalangle B = 65°$. $\sphericalangle ADB = 50°$ כי סכום הזוויות במשולש הוא 180°. $\sphericalangle ADC = 130°$ כי היא זווית צמודה לזווית ADB.

12. מלבן ABCD



א. מה גודלה של $\sphericalangle C_2$ אם $\alpha = 18^\circ$? נמקו.

ב. מה גודלה של $\sphericalangle C_1$ אם $\alpha = 32^\circ$? נמקו.

ג. האם יתכן ש - $\alpha = 92^\circ$? נמקו.

בהנחה ש- $\alpha = 30^\circ$.

$ד_1$. חשבו את גודל הזוויות במשולש ADC.

$ד_2$. מה היחס בין שלוש הזוויות של המשולש ADC?

$ה_1$. מה צריך להיות גודלה של α כדי שמשולש ABC יהיה משולש שווה שוקיים? מה המרובע שהתקבל?

$ה_2$. מה צריך להיות גודלה של α כדי שהמלבן ABCD יהיה ריבוע? נמקו.

<u>דרך אפשרית לפתרון:</u>

א. $\sphericalangle C_2 = 72^\circ$ - סכום הזוויות במשולש הוא 180°.

ב. $\sphericalangle C_1 = 32^\circ$ - הצלעות הנגדיות במלבן מקבילות והזוויות המתחלפות בין ישרים מקבילים שוות זו לזו

ג. לא יתכן כי זוויות המלבן ישרות ולא יתכן שחלק מהזווית הישרה יהיה גדול מ 90°.

ד. אם $\alpha = 30^\circ$ אז $\sphericalangle A_1 = 60^\circ$ כי משלימה את α לזווית ישרה ו- $\sphericalangle C_1 = 30^\circ$ כי אלו זוויות מתחלפות בין מקבילים. ידוע ש $\sphericalangle D = 90^\circ$. ולכן היחס בין זוויות המשולש $\sphericalangle C_1 : \sphericalangle A_1 : \sphericalangle D$ הוא $3 : 2 : 1$.

ה. אם $\alpha = 45^\circ$ אז גם $\sphericalangle A_1 = 45^\circ$ וגם $\sphericalangle C_1 = 45^\circ$. אם במשולש (ADC) יש שתי זוויות שוות אז המשולש שווה שוקיים ולכן $AD = DC$. אם במלבן הצלעות הסמוכות שוות אז המלבן הוא ריבוע.

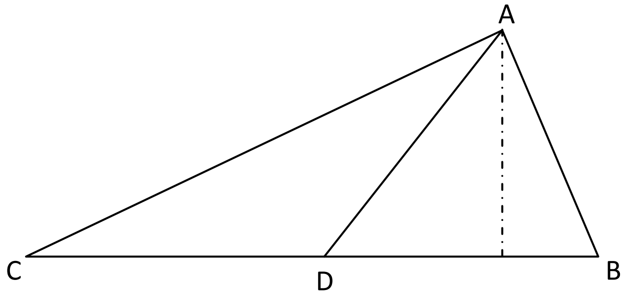
13. משולש ABC ישר זווית ($\measuredangle A = 90°$)

AD תיכון לצלע BC

AC = 12 ס"מ, AB = 5 ס"מ

א. חשבו את שטחי המשולשים ADC ,ADB ,ABC

ב. חשבו את היקף המשולש ADC



<u>דרך אפשרית</u>

א. שטח משולש ACB הוא מחצית מכפלת הניצבים: $\frac{5 \cdot 12}{2} = 30$ ולכן השטח הוא 30 סמ"ר.

נעביר גובה מהקודקוד A לצלע BC. גובה זה הוא גובה לשני המשולשים. נתון ש-AD הוא תיכון לצלע BC ולכן מחלק את הצלע BC לשני חצאים. שטחי המשולשים ADB ו- ADC שווים, כי הגובה שווה ואורכי הצלע אליה יורד הגובה שווים. סכום השטחים של שני המשולשים ADB ו- ACD הוא שטח המשולש הגדול ABC. לכן, שטח כל אחד מהמשולשים הוא 15 סמ"ר.

הערה: באופן כללי הוכח שהתיכון מחלק את המשולש לשני משולשים שווי שטח.

ב. למציאת היקף המשולש ADC יש למצוא את אורך היתר בעזרת משפט פיתגורס:

$$5^2 + 12^2 = BC^2$$

$$25 + 144 = 169$$

$$BC^2 = 169$$

$BC > 0$, $\sqrt{169} = 13$, לכן $BC = 13$ ס"מ

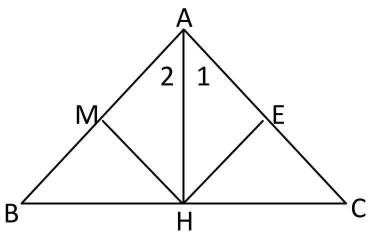
AD תיכון ליתר ולכן $DA = DC = DB = 6.5$ ס"מ כי תיכון ליתר במשולש ישר זווית שווה למחצית היתר ולכן היקף המשולש ADC הוא $6.5 + 6.5 + 12 = 25$ ס"מ

14. משולש ABC הוא משולש ישר זווית ושווה שוקיים ($\sphericalangle A = 90°$)

AH גובה לבסיס.

HE הוא תיכון לצלע AC במשולש AHC, HM הוא גובה לצלע AB במשולש AHB.

נמקו מדוע המרובע AEHM הוא ריבוע.



דרך אפשרית I	דרך אפשרית II
$\triangle ABC$ ישר זווית ושווה שוקיים נתון לכן $\sphericalangle A = 90°$, $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 45°$ $AH \perp BC$ נתון $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2 = 45°$ גובה לבסיס במשולש שווה שוקיים הוא גם חוצה זווית מכאן $\sphericalangle C = \sphericalangle A_1$ ולכן $\triangle AHC$ משולש ישר זווית ושווה שוקיים אם במשולש שתי זוויות שוות אז המשולש שווה שוקיים HE תיכון לצלע AC AC היתר במשולש ישר זווית ושווה שוקיים AHC $AE = HE$ תיכון ליתר במשולש ישר זווית שווה למחצית היתר וכן $AC \perp HE$ תיכון לבסיס במשולש שווה שוקיים הוא גם גובה $\sphericalangle AMH = 90°$ נתון $HM \perp AB$ לכן א. מרובע AEHM הוא מלבן כי מרובע בעל שלוש זוויות ישרות הוא מלבן. לכן ב. AEHM הוא ריבוע כי מלבן בעל צלעות סמוכות שוות הוא ריבוע.	א. נוכיח שמרובע AEHM הוא מלבן: נתון שזוויות A ו- M הן ישרות. AH גובה במשולש ולכן הוא גם חוצה זווית ומכאן שזוויות A_1 ו- A_2 בנות 45° HE תיכון לצלע AC שהיא היתר במשולש AHC, ולכן $AE = EH$ וגם זווית AHE בת 45°. זווית AEH משלימה את סכום הזוויות במשולש ל 180° ולכן היא זווית ישרה. אם במרובע שלוש זוויות ישרות גם הרביעית ישרה והמרובע הוא מלבן. ב. נוכיח שהמלבן הוא ריבוע: הוסבר מדוע $AE = EH$ ומלבן שלו זוג צלעות סמוכות שווה הוא ריבוע.